

**Gli infiniti in fisica:
come li fronteggiamo, cosa ci insegnano**

**Storia delle idee scientifiche e filosofiche
L'infinito addomesticato
Accademia delle Scienze di Torino
28 Aprile 2026**

**Alessandro Bottino
Università di Torino
Accademia delle Scienze**

Ogni teoria fisica deve produrre **risultati con valori finiti**, confrontabili con le **misure sperimentali**.

Tuttavia, avviene spesso che, nello sviluppo di una teoria, si incontrino **quantità che assumono valori infiniti**. Nel passato della fisica molti di questi infiniti sono stati **addomesticati**, altri **interpretati**.

Il problema degli infiniti ha comunque molto spesso portato all'elaborazione di **idee straordinariamente innovative** e ad **avanzamenti formidabili** nella comprensione dei fenomeni fisici.

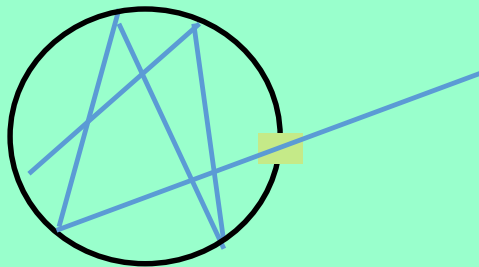
Esaminiamo alcuni importanti casi del passato, per poi accennare ad un grande problema nella ricerca attuale.

La catastrofe ultravioletta

Nella seconda metà dell'Ottocento vi fu uno studio approfondito delle proprietà della **radiazione di corpo nero**

Corpo nero: oggetto che assorbe tutta la radiazione elettromagnetica incidente

Esemplificando: **cavità, con piccola apertura**

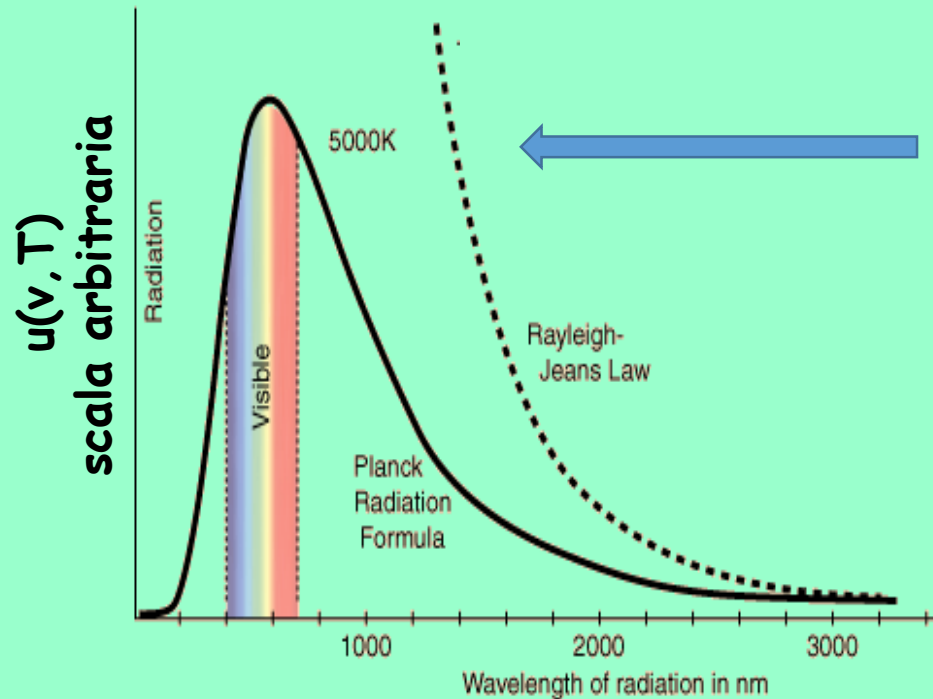


Studiamo questo sistema quando la **radiazione contenuta è in equilibrio termico con le pareti**

$u(\nu, T)$ = distribuzione spettrale della densità di energia all'interno della cavità

Teorema di Kirchhoff (1859): $u(\nu, T)$ è una **funzione universale, indipendente dal materiale della cavità**

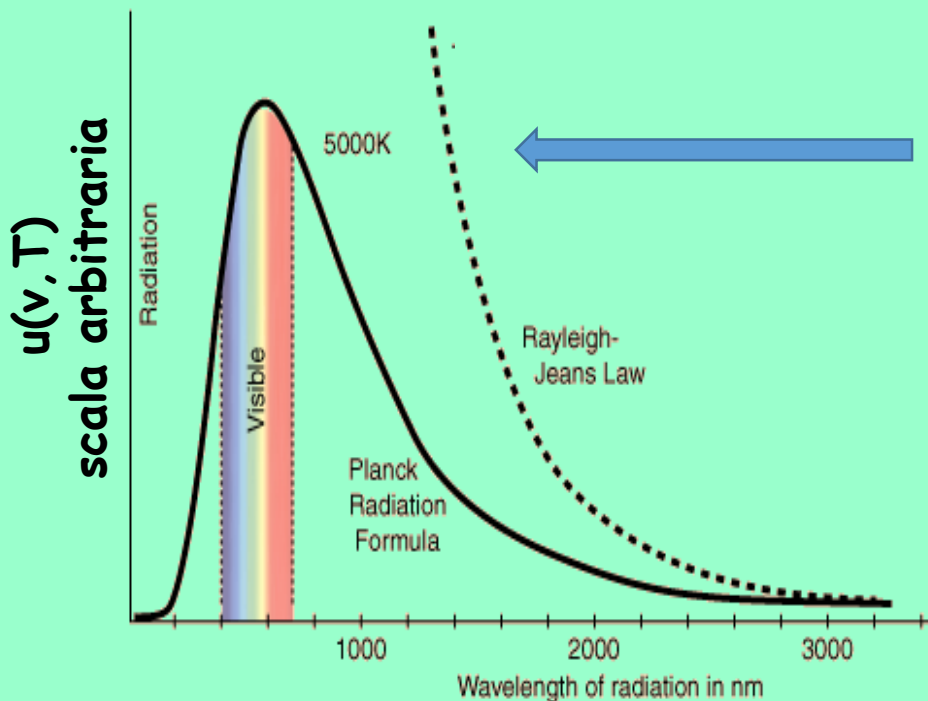
La fisica classica riproduce i dati sperimentali solo per le grandi lunghezze d'onda; per piccole lunghezze d'onda tende all'infinito: **catastrofe ultravioletta**



andamento di Rayleigh-Jeans
valido a grandi lunghezze d'onda
(regime classico) $u(\nu, T) \approx \nu^2 T$

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

La fisica classica riproduce i dati sperimentali solo per le grandi lunghezze d'onda; per piccole lunghezze d'onda tende all'infinito: **catastrofe ultravioletta**



andamento di Rayleigh-Jeans
valido a grandi lunghezze d'onda
(regime classico) $u(\nu, T) \approx \nu^2 T$

Nel 1900 Max Planck deriva la funzione spettrale con due elementi vincenti:

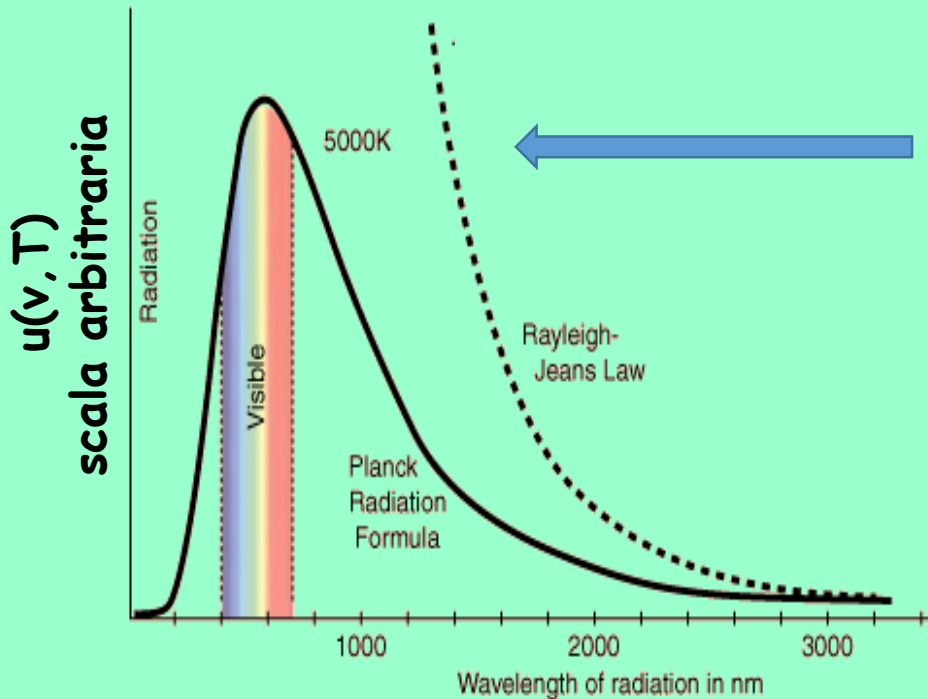
modellizza la materia in termini di oscillatori armonici

ipotizza che questi oscillatori armonici assorbono ed emettono energia non in maniera continua, ma in **multipli interi del quanto di energia** $\epsilon_0 = h\nu$ (h costante)

$$\epsilon = \epsilon_n = n\epsilon_0 \quad (n=0,1,2,\dots),$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

La fisica classica riproduce i dati sperimentali solo per le grandi lunghezze d'onda; per piccole lunghezze d'onda tende all'infinito: **catastrofe ultravioletta**



andamento di Rayleigh-Jeans
valido a grandi lunghezze d'onda
(regime classico) $u(\nu, T) \approx \nu^2 T$

Nel 1900 Max Planck deriva la funzione spettrale con due elementi vincenti:

modellizza la materia in termini di oscillatori armonici

ipotizza che questi oscillatori armonici assorbono ed emettono energia non in maniera continua, ma in **multipli interi del quanto di energia** $\epsilon_0 = h\nu$ (h costante)

$$\epsilon = \epsilon_n = n\epsilon_0 \quad (n=0,1,2,\dots),$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

formula di Planck

La soluzione del problema della catastrofe ultravioletta segnò l'inizio della **meccanica quantistica**

Planck fu a lungo convinto che la sua soluzione fosse basata su un **espediente matematico** e cercò ostinatamente di trovarne una derivazione classica

Aveva invece gettato il seme per la costruzione della meccanica quantistica; la **comprensione concettuale** della nuova teoria (**principio di indeterminazione**, concetto di **probabilità** di posizione, ...) richiese **un quarto di secolo**

Mare di Dirac

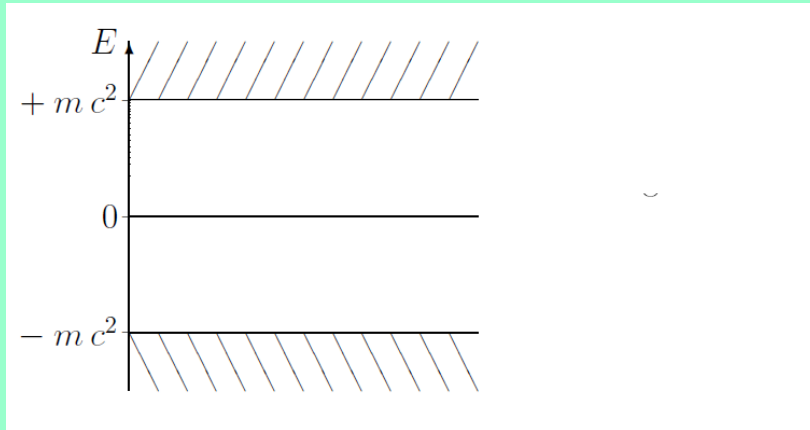
Nel 1927 **Paul Dirac** deriva l'equazione quantistica-relativistica per l'elettrone

Per un elettrone libero $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$

Mare di Dirac

Nel 1927 **Paul Dirac** deriva l'equazione quantistica-relativistica per l'elettrone

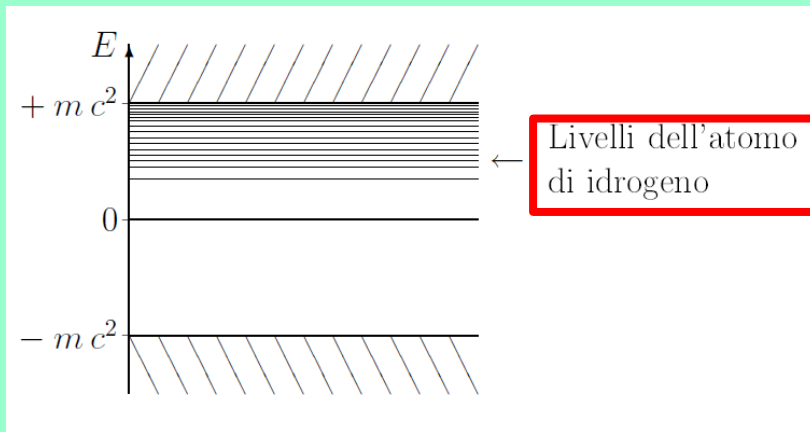
Per un elettrone libero $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ e quindi lo **spettro dell'energia** è



$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

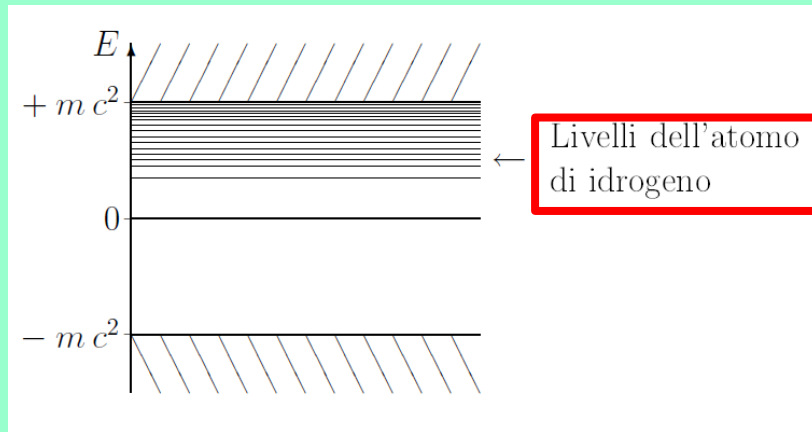


Con la stessa equazione si può studiare anche lo spettro dell'atomo di idrogeno



$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

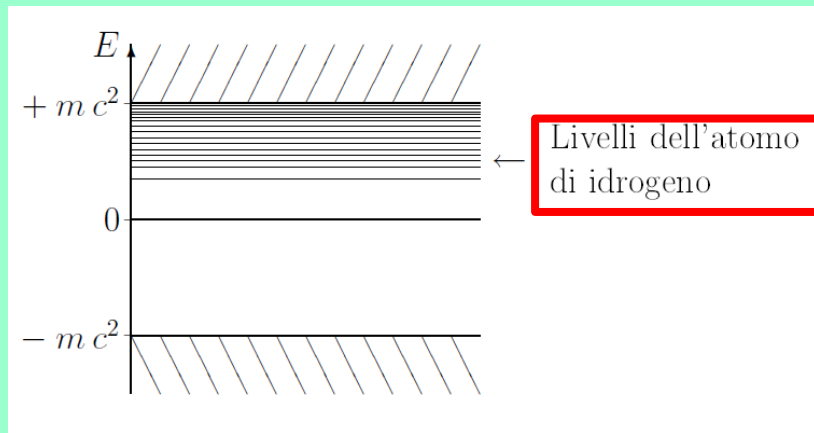
Con la stessa equazione si può studiare anche lo **spettro dell'atomo di idrogeno**



In presenza di un continuo di stati ad energia negativa con valori compresi tra $-mc^2$ e $-\infty$ un elettrone nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno **potrebbe transire** indefinitamente a stati di energia inferiore

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Con la stessa equazione si può studiare anche lo **spettro dell'atomo di idrogeno**, ma...



$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

in presenza di un continuo di stati ad energia negativa con valori compresi tra $-mc^2$ e $-\infty$ un elettrone nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno **potrebbe transire** indefinitamente a stati di energia inferiore

Allora Dirac formula l'ipotesi:

tutti gli stati ad energia negativa sono occupati

La stabilità dell'atomo di idrogeno è garantita dal principio di esclusione di Pauli

Con la stessa equazione si può studiare anche lo **spettro dell'atomo di idrogeno**, ma...



$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

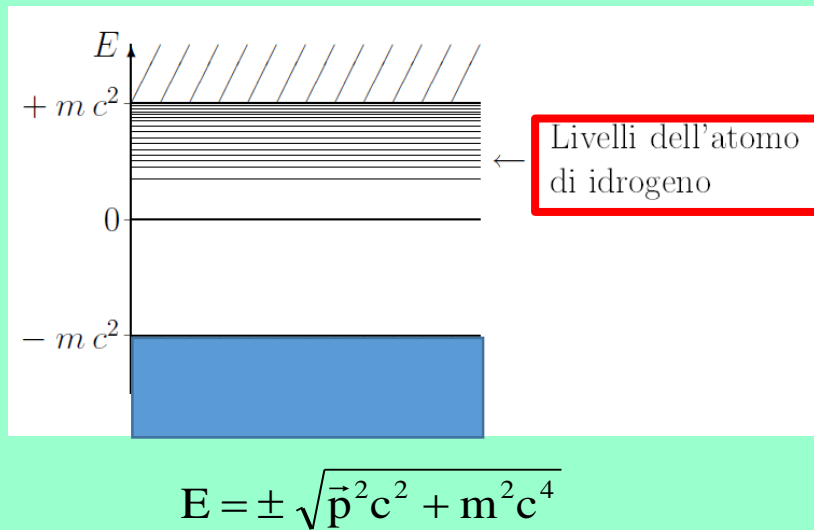
in presenza di un continuo di stati ad energia negativa con valori compresi tra $-mc^2$ e $-\infty$ un elettrone nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno **potrebbe transire** indefinitamente a stati di energia inferiore

Allora Dirac formula l'ipotesi:

tutti gli stati ad energia negativa sono occupati

La stabilità dell'atomo di idrogeno è garantita dal principio di esclusione di Pauli

Con la stessa equazione si può studiare anche lo **spettro dell'atomo di idrogeno**, ma...



in presenza di un continuo di stati ad energia negativa con valori compresi tra $-mc^2$ e $-\infty$ un elettrone nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno **potrebbe transire** indefinitamente a stati di energia inferiore

Allora Dirac formula l'ipotesi:

tutti gli stati ad energia negativa sono occupati

La stabilità dell'atomo di idrogeno è garantita dal II principio di esclusione di Pauli

Mare di Dirac: sistema fisico costituito dall'occupazione completa di tutti gli stati di particella singola ad energia negativa

Nella scala di energia originaria, il mare di Dirac ha **un'energia negativa infinita**

Possiamo interpretare il mare di Dirac come lo **stato di vuoto** e ridefinire la scala di energia, associando a questo stato di vuoto il **valore zero di energia**

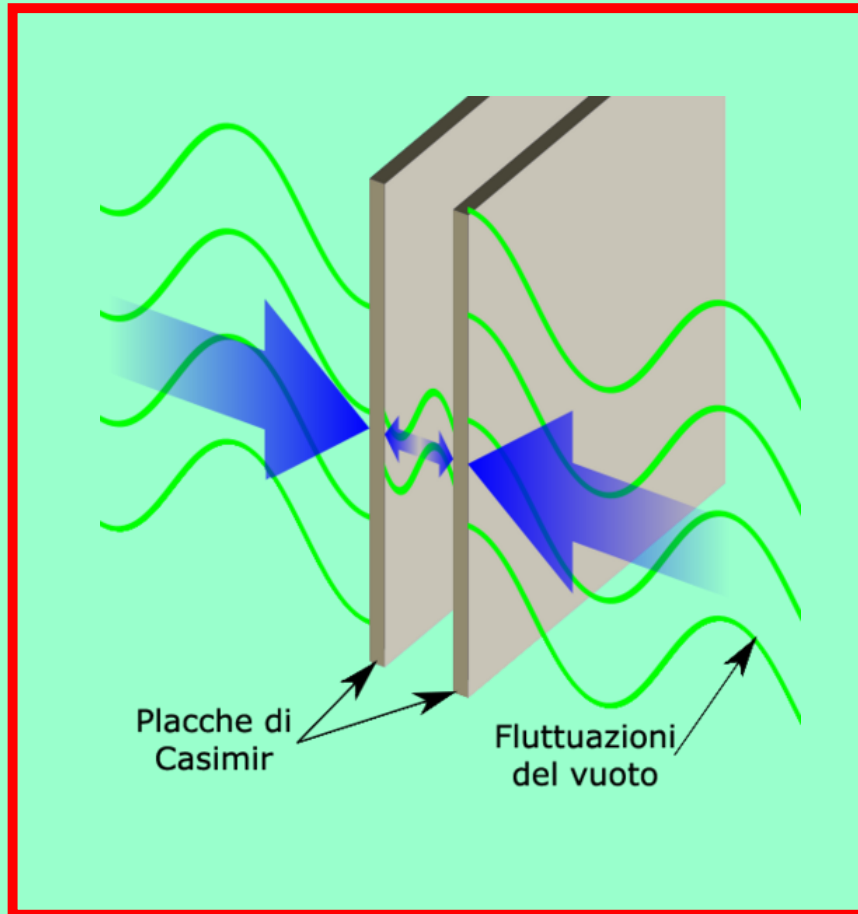
Il problema del valore infinito dell'energia del vuoto è risolto mediante un processo di sottrazione

L'introduzione del concetto di mare di Dirac porta a comprendere che **il vuoto quantistico è uno stato fisico molto complesso.**

Le sue **fluttuazioni in energia** compatibili con il principio di indeterminazione $\Delta E \cdot \Delta t \approx h$ portano a **proprietà fisiche di grande rilevanza**, anche in campo cosmologico

fluttuazioni riscontrabili anche a scala macroscopica (**effetto Casimir**)

Effetto Casimir



tra le due lastre sono consentite solo
fluttuazioni con lunghezza d'onda

$$n \left(\frac{\lambda}{2} \right) = \text{distanza tra le lastre}$$

nessuna condizione per le fluttuazioni esterne

Verifica sperimentale: S.K. Lamoreaux (1997); separazione dell'intervallo 0,6 - 6 μm

Rinormalizzazioni della carica elettrica e della massa

Elettrodinamica quantistica: applicazione della meccanica quantistica all'interazione delle particelle cariche (elettrone, in primis) con il campo elettromagnetico

Primi studi alla fine degli anni '20 del secolo scorso da parte di Dirac, Heisenberg, Pauli

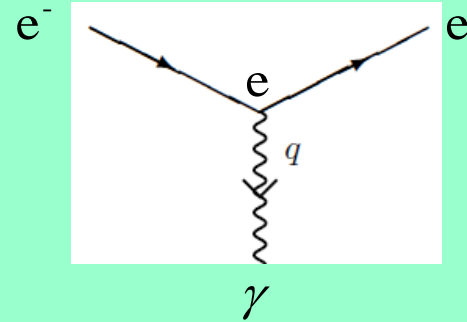
Ci si rese conto di **problemi riguardanti la massa e la carica elettrica dell'elettrone**

La teoria venne sviluppata in modo compiuto da **J. Schwinger, S. Tomonaga e R. Feynman** in modo indipendente (1947-1949) - premiati con il Nobel nel 1965

Freeman Dyson dimostrò l'equivalenza dei tre procedimenti

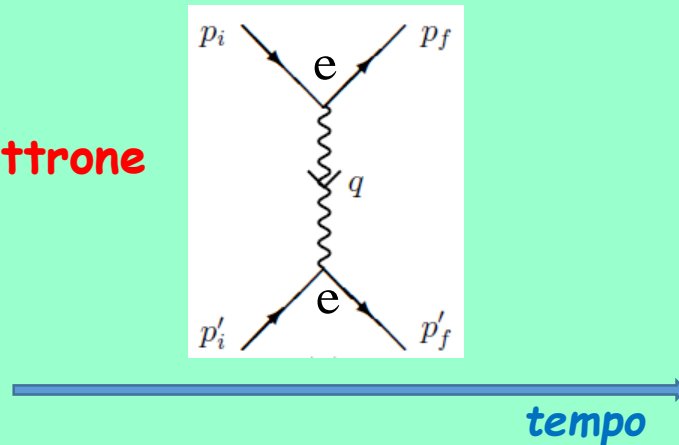
In elettrodinamica quantistica è utile rappresentare i processi fisici mediante diagrammi:
diagrammi di Feynman

questi diagrammi sono tutti costituiti da un unico **vertice fondamentale di interazione**



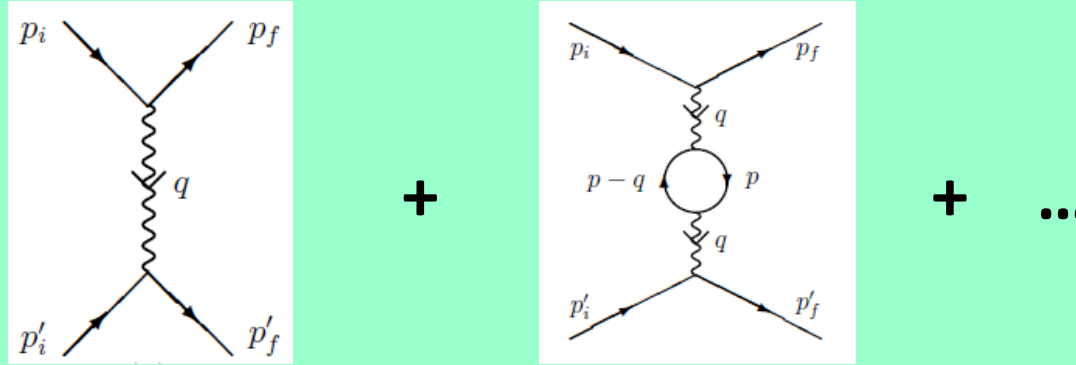
un esempio:

collisione elettrone-elettrone



a partire da questo diagramma si calcola l'**ampiezza** il cui modulo quadro dà la **probabilità del processo**
questa ampiezza è di ordine e^2

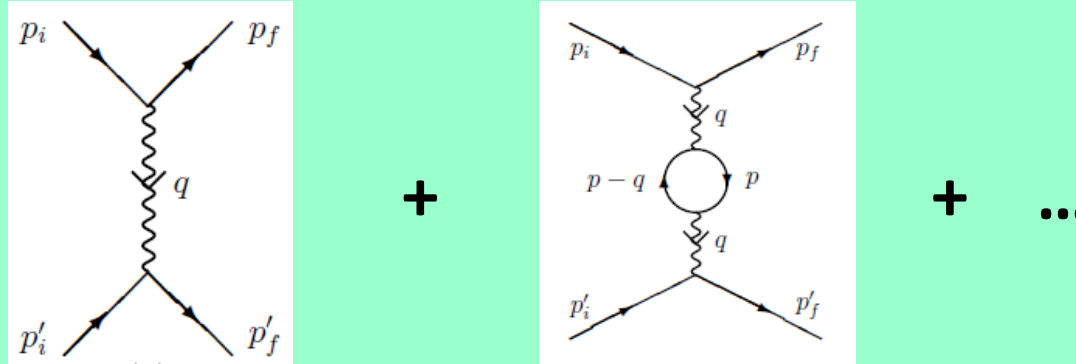
nell'urto elettrone-elettrone andiamo all'ordine successivo



$$\frac{e^2}{\hbar c} \equiv \alpha \approx \frac{1}{137}$$

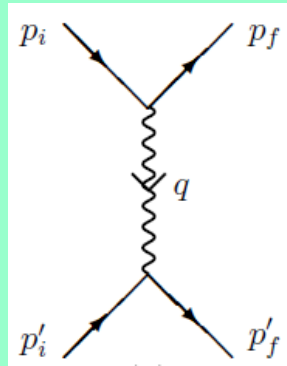
$$A(q) = e^2 A_2(q) + e^4 A_4(q) + \dots$$

nell'urto elettrone-elettrone andiamo all'ordine successivo

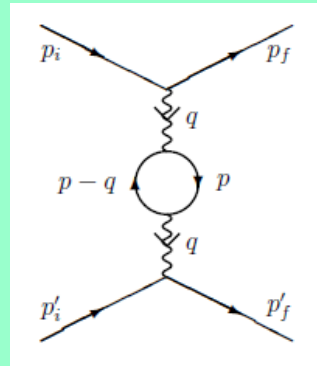


$$\frac{e^2}{\hbar c} \equiv \alpha \approx \frac{1}{137}$$

$$A(q) = e^2 A_2(q) + e^4 A_4(q) + \dots = A_2(q) [e^2 + e^4 (B_{\text{infinito}} + B_{\text{finito}}(q))] + \dots$$



+



+

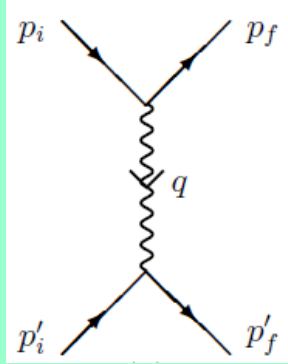
...

$$\frac{e^2}{\hbar c} \equiv \alpha \approx \frac{1}{137}$$

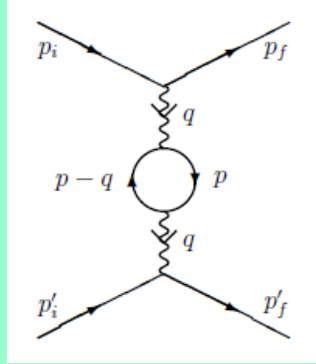
$$A(q) = e^2 A_2(q) + e^4 A_4(q) + \dots = A_2(q) [e^2 + e^4 (B_{\text{infinito}} + B_{\text{finito}}(q))] + \dots$$

$$\int_{m^2}^{\infty} \frac{dp^2}{p^2}$$

infinità logaritmica



+



+

...

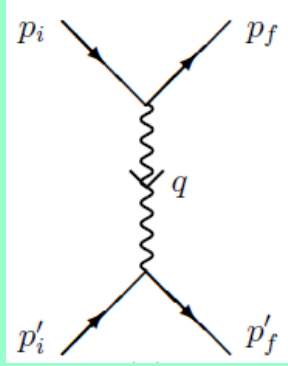
$$\frac{e^2}{\hbar c} \equiv \alpha \approx \frac{1}{137}$$

$$A(q) = e^2 A_2(q) + e^4 A_4(q) + \dots = A_2(q) [e^2 + e^4 (B_{\text{infinito}} + B_{\text{finito}}(q))] + \dots$$

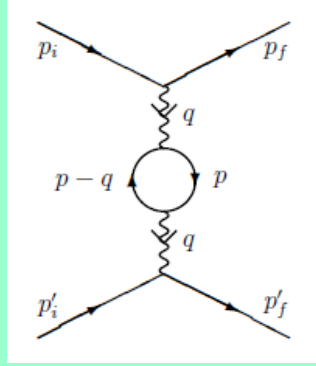
$$e_R^2$$

$$\int_{m^2}^{\infty} \frac{dp^2}{p^2}$$

infinità logaritmica



+



+

...

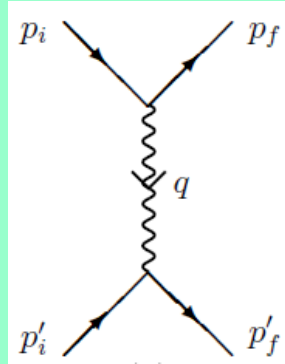
$$\frac{e^2}{\hbar c} \equiv \alpha \approx \frac{1}{137}$$

$$A(q) = e^2 A_2(q) + e^4 A_4(q) + \dots = A_2(q) \left[\underbrace{e^2 + e^4 (B_{\text{infinito}} + B_{\text{finito}}(q))}_{e_R^2} \right] + \dots$$

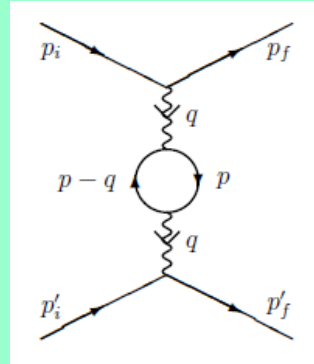
$$\int_{m^2}^{\infty} \frac{dp^2}{p^2}$$

infinità logaritmica

$$= A_2(q) [e_R^2 + e_R^4 B_{\text{finito}}(q)] + \dots$$



+



+

...

$$\frac{e^2}{\hbar c} \equiv \alpha \approx \frac{1}{137}$$

$$A(q) = e^2 A_2(q) + e^4 A_4(q) + \dots = A_2(q) \left[\underbrace{e^2 + e^4 (B_{\text{infinito}})}_{e_R^2} + B_{\text{finito}}(q) \right] + \dots$$

$$\int_{m^2}^{\infty} \frac{dp^2}{p^2}$$

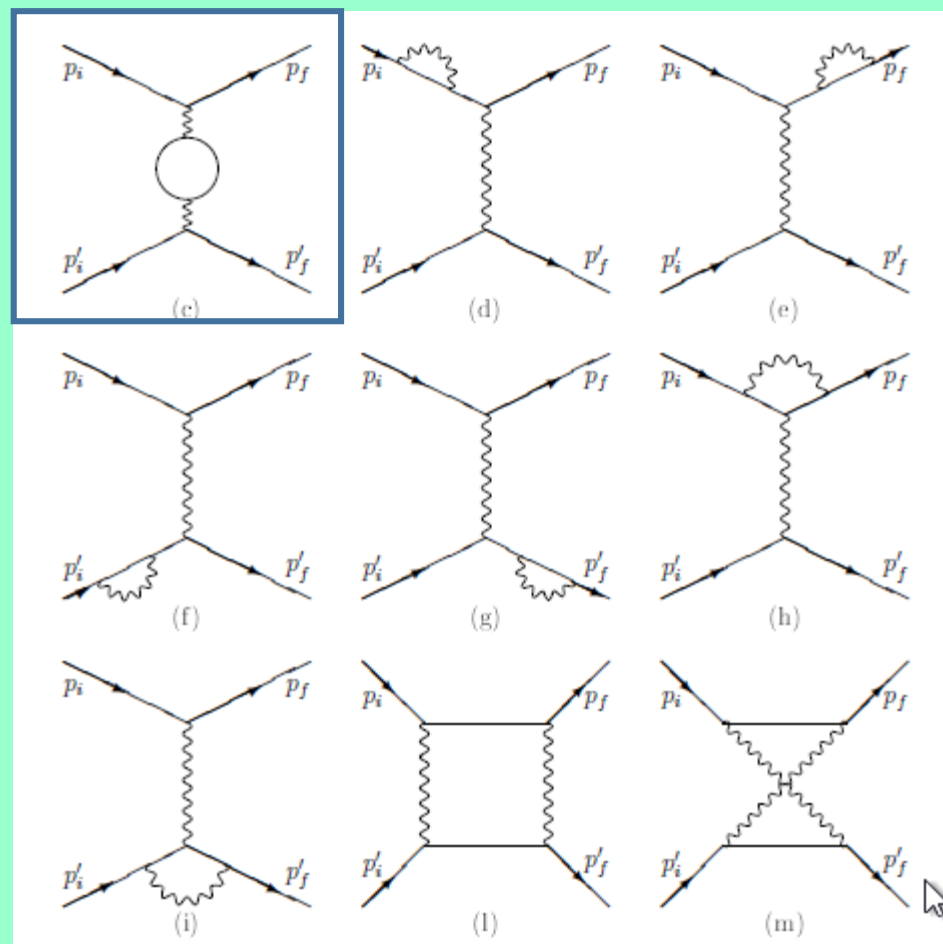
infinità logaritmica

$$= A_2(q) [e_R^2 + e_R^4 B_{\text{finito}}(q)] + \dots$$

la carica elettrica è ridefinita in modo da assorbire la divergenza (**rinormalizzazione della carica**)
 e_R è la **carica elettrica fisica** misurata nei processi di bassa energia:

$$\frac{e_R^2}{\hbar c} \equiv \alpha_R \approx \frac{1}{137}$$

tutti i diagrammi di ordine e^4 nell'urto elettrone-elettrone



In elettrodinamica quantistica si procede anche ad una **rinormalizzazione della massa**

La teoria non è in grado di calcolare valori di **carica e massa**, che sono parametri fenomenologici **misurati sperimentalmente**

L'elettrodinamica quantistica ha enorme **carattere predittivo**: fissati pochi parametri fenomenologici, consente di ottenere **predizioni teoriche all'accuratezza desiderata**. Ossia, la teoria è rinormalizzabile

Il **Modello Standard** delle particelle (S. Glashow, A. Salam, S. Weinberg; 1967/1968) è un modello **rinormalizzabile** (G. 't Hooft; 1971)

Singolarità in cosmologia

L'energia emessa dalle stelle è generata da reazioni termonucleari di fusione; la pressione termica prodotta da queste reazioni controbilancia la pressione di gravità della stella. Quando i carburanti nucleari si esauriscono, la stella comincia a contrarsi.

Per stelle con massa inferiore a 1,4 masse solari la contrazione gravitazionale può arrestarsi perchè contrastata dalla pressione interna di un gas di elettroni:
→ si forma una nana bianca

Per stelle con massa tra 3 e 5 masse solari la contrazione gravitazionale può arrestarsi perchè contrastata dalla pressione interna di un gas di neutroni:
→ si forma una stella di neutroni

Qual è l'evoluzione della contrazione gravitazionale per una stella di massa maggiore?

In una pubblicazione del 1939 **Albert Einstein** considerò il processo di contrazione gravitazionale di stelle molto massicce, ma utilizzò un modello molto schematico che lo indusse a concludere che un sistema fisico di quel tipo non può contrarsi indefinitamente. **Conclusione che risultò errata.**

Nello stesso anno **Robert Oppenheimer** in due articoli, uno con **George Volkoff**, l'altro con **Hartland Snyder**, mostrò che una **stella massiccia** a simmetria sferica **può contrarsi sino a raggiungere la singolarità a $r=0$, dove la materia ha densità infinita.** Con i lavori di Oppenheimer e collaboratori nasce il concetto dell'oggetto cosmologico che sarà poi battezzato **buco nero.**

Lo studio dei buchi neri venne ripreso poi molto più tardi, negli anni '50, da John Wheeler e, attraverso lavori fondamentali di **Stephen Hawking, Kip Thorne, Roger Penrose** e di molti altri, ha acquisito straordinario rilievo nella ricerca fisica contemporanea.

Rappresenta un **caso non ancora risolto di infinito**, in quanto richiede la comprensione di fenomeni che coinvolgono **simultaneamente proprietà di meccanica quantistica e di relatività generale**.

Lo studio dei buchi neri venne ripreso poi molto più tardi, negli anni '50, da John Wheeler e, attraverso lavori fondamentali di **Stephen Hawking**, **Kip Thorne**, **Roger Penrose** e di molti altri, ha acquisito straordinario rilievo nella ricerca fisica contemporanea.

Rappresenta un **caso di infinito non ancora risolto**, in quanto richiede la comprensione di fenomeni che coinvolgono **simultaneamente proprietà di meccanica quantistica e di relatività generale**.

Lavori in corso...



Singularità in Relatività Generale

Lo spazio-tempo relativistico attorno ad una massa M a simmetria sferica e non-rotante è descritto dalla metrica di Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

dove $r_s \equiv 2GM / c^2$ è il **raggio di Schwarzschild**; M la sorgente gravitazionale nell'origine

$r = 0$ autentica singolarità fisica,

$r = r_s$ artefatto, eliminabile mediante cambiamento di coordinate

Se, per contrazione gravitazionale, il raggio r diventa minore di r_s **la contrazione continua indefinitamente (Openheimer e Serber, 1939) - buco nero**

La comprensione completa del fenomeno richiederebbe una teoria descrivente simultaneamente Relatività Generale e Meccanica Quantistica

$$u(\nu) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \bar{\epsilon}$$

calcolo del **valor medio dell'energia** $\bar{\epsilon}$ utilizzando la **funzione statistica di Boltzmann** ($\beta \equiv 1/(kT)$)

caso classico:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon e^{-\beta\epsilon} d\epsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon} = kT$$

caso quantistico, ossia ponendo: $\epsilon = \epsilon_n = n\epsilon_0$ ($n=0,1,2,\dots$), $\epsilon_0 = h\nu$ (h costante)

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \epsilon_0 e^{-\beta n \epsilon_0}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n \epsilon_0}} = \frac{\epsilon_0}{e^{\beta \epsilon_0} - 1} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

la formula classica è il regime asintotico della formula esatta (quantistica) per piccole frequenze